

Stabilisabilité Quadratique et Paramétrisation Convexe

Jacques Bernussou et Germain Garcia¹
Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des
Systèmes du C.N.R.S.
7, Avenue du Colonel Roche
31077 Toulouse Cedex - France
FRANCE

Abstract: In this paper, some methods allowing the control law design for uncertain linear systems based on the quadratic stabilizability concept are presented. Introducing a convex parameterization of the quadratic stabilizing gains class, it is possible to define a convex optimisation problem for control law determination. In this direction, some classical control problems namely, stabilization, LQ design, pole placement, are solved for uncertain systems.

Résumé:

Cet article présente quelques méthodes de synthèse de lois de commande pour les systèmes linéaires incertains à partir de l'approche quadratique (stabilisabilité quadratique). En introduisant une paramétrisation convexe de l'ensemble des gains qui stabilisent quadratiquement le système, on montre comment, à ces problèmes de synthèse, on peut associer un problème d'optimisation convexe qui rend la détermination des lois de commande aisée. Ainsi plusieurs problèmes classiques en théorie de la commande (Stabilisation, commande L.Q., Placement de pôles, rejet de perturbations) peuvent être résolus dans le cas incertain.

Jacques Bernussou graduated from the Engineering School E.N.S.E.E.I.H.T. in Toulouse. He got the Docteur Ingénieur degree and the docteur d'état degree in 1970 and 1974 respectively at the University Paul Sabatier. He is now Directeur de Recherche of the C.N.R.S. (Centre National de la Recherche Scientifique) working at the Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes, LAAS-CNRS. He is head of the Research Group

¹Maître de Conférences à l'INSA, Complexe Scientifique de Rangueil, 31077 Toulouse Cedex

"Décentralisation, Hiérarchisation, Parallélisme en Optimisation et Commande". His current scientific interests are in large scale system analysis and control, constrained and robust control.

Germain Garcia graduated from the Engineering School "Institut National des Sciences Appliquées" (I.N.S.A.) in Toulouse. He got the Docteur de l'INSA degree in 1988. He is "Maître de Conférences" at INSA and he works at the Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes, LAAS-CNRS. His current research interests are linear systems and robust control.

1. Introduction

Durant cette dernière décennie, sont parues de nombreuses contributions dans le domaine de la commande robuste [6]. Cette affirmation peut aisément être vérifiée en regardant les grands journaux et les congrès importants pour la discipline "Automatique". Par robustesse, on entend la capacité pour une loi de commande, d'assurer un degré d'invariance des performances (au minimum la stabilité) du système commandé vis à vis d'imperfections de modélisation (incertitude, approximation, réduction de modèle...).

Cet engouement pour les travaux en commande robuste se justifie assurément par le caractère éminemment pratique du but recherché et par l'apparition au début des années 80 de quelques résultats significatifs et novateurs dans le domaine. Ces travaux se trouvent confortés de plus en plus par le fait que certaines techniques apparues durant les années 60-70 souffraient de lacunes du point de vue robustesse et notamment celle dite du L.Q.G [7]. Parmi les approches de base dans le domaine de la robustesse et en ne retenant que celles qui ont suscité une école de "pensée", il est possible d'en retenir trois, mentionnées ici sans ordre d'importance.

La première a été initialisée par les travaux du mathématicien russe Kharitonov, elle s'attache à énoncer des critères de stabilité de processus linéaires à incertitude paramétrique de type in-

tervalle [21]. Cette approche est relativement peu utilisable à des fins de synthèse.

Très populaire et féconde (du point de vue nombre de contributions) est l'approche dite de synthèse H_∞ qui, initialement développée dans le domaine fréquentiel, a eu une traduction dans le domaine temporel (représentation d'état) et pour laquelle on peut mentionner le papier "tutorial" "DGKF" [8].

Enfin pour terminer sera mentionnée l'approche quadratique dans laquelle s'inscrit la totalité des travaux et résultats développés dans cette communication [2], [25], [3]. Les paragraphes qui suivront, auront pour but de la présenter de façon relativement détaillée en mentionnant les travaux représentatifs du domaine. Il s'agit d'une approche de type "Lyapunov" dont l'intérêt essentiel à nos yeux réside dans le fait qu'elle permet une paramétrisation convexe pour la recherche des gains robustes. En effet, dans cet article, cette paramétrisation joue un rôle fondamental.

Dans le domaine de l'approche quadratique, il existe deux grands types de résultats dont la spécificité découle du mode de représentation choisi pour l'incertitude. Nous développerons les deux en essayant pour chacun de donner des résultats concernant non seulement la stabilisation robuste mais également la robustesse avec contraintes en performance, contrainte de type placement de pôles, d'optimisation H_2 et H_∞ . Pour des raisons de "place" et de "temps" les résultats énoncés ne seront dans le cas du retour d'état. Enfin bien que la plupart des résultats puissent être étendus au cas des systèmes discrets, c'est celui des systèmes continus qui servira de support.

2. Stabilisabilité quadratique - Incertitudes

Soit le système dynamique linéaire:

$$\dot{x}(t) = A(r(t))x + B(s(t))u \quad (1)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$. $r(t)$ et $s(t)$ sont des paramètres incertains satisfaisant des hypothèses qui assurent l'existence et l'unicité des solutions de (1).

Définition 1 . [2]. Le système (1) est dit quadratiquement stabilisable s'il existe une commande $u = u(x)$, $u(0) = 0$ et une matrice P symétrique définie positive telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$x'[A(r(t))'P + PA(r(t))]x + 2x'PB(s(t))u(x)x \leq -\alpha\|x\|^2$$

où α est un scalaire positif.

A partir de la définition, il est clair que les travaux en stabilisabilité quadratique pourront être rattachés à la classe des approches de type Lyapunov. En l'occurrence, la stabilité quadratique exige l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique unique permettant de tester la stabilité pour toute réalisation du système (1) dans son domaine d'incertitude. Il s'agit là d'une contrainte conférant aux résultats un certain degré de suffisance, degré de suffisance qui peut se tolérer par le fait que l'existence d'une solution définie positive à l'équation de Lyapunov est une condition nécessaire et suffisante de stabilité d'un système linéaire et que, comme il sera vu plus loin, ce concept conduit à une paramétrisation convexe de la classe des gains stabilisants [3].

Nous reprenons dans cet article les deux types d'incertitudes rencontrés dans la littérature internationale et dont la formulation conduit à des résultats et approches relativement différents [26], [14].

Incertainces de type polyédrique [3]

Il s'agit d'une classe de systèmes décrits par les équations suivantes:

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu \quad (2)$$

avec :

$$A \in D_A, \quad B \in D_B.$$

$$D_A = \{A \in \mathbb{R}^{n,n}, A = \sum_{i=1}^{n_A} \lambda_i A_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n_A} \lambda_i = 1\} \quad (3)$$

$$D_B = \{B \in \mathbb{R}^{n,m}, B = \sum_{i=1}^{n_B} \mu_i B_i, \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n_B} \mu_i = 1\} \quad (4)$$

Cette formulation est adaptée au cas où les éléments des matrices A et B sont des fonctions

multilinéaires des paramètres d'incertitude r et s , eux mêmes soumis à une incertitude de type intervalle.

Incertitudes de type bornées en norme [26]

La classe des systèmes de ce type est définie comme suit:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u \quad (5)$$

où A et B sont des matrices précisément connues et:

$$[\Delta A \quad \Delta B] = D\Delta(t)(E_1 \quad E_2)$$

De plus :

$$\Delta \in \mathcal{F} = \{\Delta(t)' \Delta(t) \leq 1\}$$

Un tel type d'incertitude définit dans l'espace paramétrique des éléments de $(A + \Delta A, B + \Delta B)$, un hyperellipsoïde représentant le domaine d'incertitude paramétrique. Une particularité de cette représentation réside dans le fait qu'elle définit explicitement un système "nominal" (A, B) contrairement à l'incertitude de type polyédrique.

Bref historique

Avant de rentrer dans le vif du sujet, un bref historique retraçant l'évolution des résultats obtenus dans le domaine est donné. Les premiers travaux ont été publiés aux alentours des années 75. Il s'agit essentiellement des résultats de Meilakhs et de Hollot et al [23], [17] dans lesquels, le problème de stabilisation robuste par retour d'état pour des systèmes incertains avec incertitude de type polyédrique est résolu. Quelques années plus tard, dans un cadre plus général, Barmish définit la notion de stabilisabilité quadratique et énonce une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité quadratique par retour d'état [2]. Ce résultat est, à nos yeux, un des plus importants dans le domaine. Il a été notamment le point de départ d'un certain nombre de travaux publiés les années suivantes.

Dans le cadre des systèmes incertains dont l'incertitude est bornée en norme, Petersen en 1987 donne une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité quadratique par retour d'état pour des systèmes où seule la matrice dynamique est incertaine [26]. Le calcul de la loi de commande passe par la résolution itérative

d'une équation de Riccati. Ces résultats sont étendus aux cas d'incertitudes sur les matrices dynamiques et de commande par Zhou et al l'année suivante [29].

Pour les systèmes avec incertitude de type polyédrique, Bernussou et al, en 1989, énoncent une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité quadratique par retour d'état [3]. Les bonnes propriétés mathématiques de ces conditions (convexité) permettent d'associer un problème d'optimisation convexe pour la détermination du gain de retour d'état [14].

On peut noter que tous les travaux cités précédemment s'intéressent principalement aux retours d'état. Dans le cas où le vecteur d'état n'est pas mesurable, on ne peut envisager comme alternative réaliste que la stabilisation par retour de sortie (statique ou dynamique). Plusieurs tentatives ont été faites dans cette optique. Les résultats dans ce domaine sont basés pour la plupart sur des conditions suffisantes, ce qui fait que l'on peut dire que ce problème reste, à l'heure actuelle, encore largement ouvert [9], [28], [24].

La stabilité en pratique est une propriété minimale que doit vérifier tout système commandé, mais il va de soi que dans bien des cas, elle n'est pas suffisante. Ceci explique l'intérêt de certains chercheurs pour la prise en compte, de contraintes en performance. Dans le cadre d'une modélisation dans l'espace d'état, ceci peut se faire de plusieurs manières. Parmi les approches possibles nous en retiendrons trois.

La première consiste à définir un critère de performance de type norme H_2 (L.Q.). Pour un système précisément connu, on arrive au problème maintenant classique de la commande linéaire quadratique. L'idée d'étendre cette technique au cas incertain fut proposée par Chang et Peng en 1972, sous le nom de "commande à coût garanti" [5]. Plus récemment, Geromel et al ont formulé et résolu le problème dans le cas des systèmes avec incertitude de type polyédrique [15].

La deuxième consiste à placer les pôles du système en boucle fermée dans certaines régions du plan complexe. On peut ainsi réaliser le fameux compromis précision / rapidité. Pour les systèmes incertains, l'outil de base est "l'équation de Lyapunov généralisée" introduite par Mazco en 1980 [22]. Il existe dans la littérature un grand nombre de résultats qui sont pour la plupart des outils d'analyse [19],

[18], [20]. Plus récemment, toujours à partir de l' "équation de Lyapunov généralisée", des conditions ont été obtenues aussi bien pour les systèmes incertains avec incertitudes bornées en norme que de type polyédrique [1], [16], [10].

Enfin, une troisième façon de tenir compte de contraintes en performance consiste à atténuer l'effet d'une perturbation sur une sortie commandée. C'est ce que l'on appelle le "rejet de perturbation". Dans le cas certain une solution à ce problème a été proposée par Petersen [25]. Il donne une condition fondée sur la résolution d'une équation de Riccati pour rendre la norme H_∞ du transfert entre la perturbation et la sortie commandée inférieure à un certain seuil. Le cas incertain a été résolu plus récemment, (incertitudes de type polyédrique) [12], (incertitudes bornées en norme) [4].

3. Méthodologie générale

Dans ce paragraphe, la philosophie générale sur laquelle s'appuie tout ce qui va suivre est présentée. Comme il a été annoncé dans l'introduction, l'idée de base est de ramener la détermination des lois de commande à la résolution d'un problème d'optimisation convexe. Pour cela, il est nécessaire de pouvoir exprimer les conditions théoriques se rattachant au problème à résoudre (stabilisation, coût garanti ...) comme des fonctions convexes par rapport à l'inconnue qui sera, comme nous le verrons une matrice définie positive. Pour rendre les choses plus concrètes, soit le système sans incertitude décrit par :

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu \quad (6)$$

et \mathcal{K}_S l'ensemble des gains de retour d'état stabilisant asymptotiquement le système (6),

$\mathcal{K}_S = \{K : (A+BK) \text{ est asymptotiquement stable}\}$.

Il est possible d'introduire une paramétrisation convexe qui décrit l'ensemble \mathcal{K}_S . Pour cela définissons:

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)},$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times m} \quad (7)$$

et les ensembles :

$$\mathcal{N} = \{z \in \mathbb{R}^{(n+m)} \mid z \neq 0, G'z = 0\}$$

$$\mathcal{W} = \left\{ W = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}, \right.$$

$$\left. W = W' \geq 0, W_1 > 0 \right\} \quad (8)$$

on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème 1 :

i) L'ensemble matriciel:

$$\mathcal{C}_S = \{W \in \mathcal{W}; z'(FW + WF')z < 0, \forall z \in \mathcal{N}\} \quad (9)$$

est un cône convexe

ii)

$$\mathcal{K}_S = \{K = W_2'W_1^{-1}, W \in \mathcal{C}_S\} \quad (10)$$

Démonstration. Pour i) la structure de cône convexe résulte de la nature linéaire des équations servant à définir \mathcal{C}_S . Pour ii), notant que $z \in \mathcal{N}$, la relation (9) s'écrit:

$$x'(AW_1 + W_1A' + BW_2' + W_2B')x < 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

soit :

$$(A + BW_2'W_1^{-1})W_1 + W_1(A + BW_2'W_1^{-1})' < 0$$

Pour $W \in \mathcal{W}$, $W_1 > 0$, $(A + BW_2'W_1^{-1})$ est asymptotiquement stable, ce qui implique que $W_2'W_1^{-1}$ appartient à \mathcal{K}_S .

Inversement, pour $K \in \mathcal{K}_S$, il existe une matrice $P > 0$ telle que :

$$(A + BK)'P + P(A + BK) < 0$$

soit :

$$(A + BK)P^{-1} + P^{-1}(A + BK)' < 0$$

et donc il existe

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & P^{-1}K' \\ KP^{-1} & W_3 \end{pmatrix} = W \in \mathcal{C}_S$$

telle que $K = W_2'W_1^{-1}$. □

Cette paramétrisation de la classe des gains stabilisants présente l'intérêt primordial d'être définie à partir d'ensembles paramétriques convexes. La propriété de convexité est importante car elle va permettre d'utiliser des méthodes de programmation mathématique pour définir des méthodes de synthèse de gains stabilisants. Ainsi pour déterminer un gain stabilisant pouvons-nous définir un problème d'optimisation paramétrique, soit:

$$\begin{aligned} & \text{Min } f(W) \\ & \text{sous } W \in \mathcal{C}_S \end{aligned} \quad (11)$$

Comme nous le verrons dans les paragraphes suivants, dans le cas incertain qu'il s'agisse d'incertitudes polyédriques ou bornées en norme, la recherche de W se fera dans un ensemble convexe. De manière plus générale quel que soit le problème que l'on cherche à résoudre (stabilisation, coût garanti, placement de pôles ...) la recherche de W se fera dans un ensemble convexe que nous noterons \mathcal{C} .

D'autre part, un degré de liberté supplémentaire que nous utiliserons est lié au choix de $f(\cdot)$. Si l'on souhaite que le problème d'optimisation soit convexe, il faudra choisir $f(\cdot)$ convexe. Pour les problèmes que nous nous proposons de résoudre, $f(\cdot)$ pourra être choisie linéaire, plus exactement:

$$f(W) = \text{Trace}(RW)$$

où la matrice R sera choisie de manière appropriée. Ainsi, compte tenu de ce qui précède, la synthèse des lois de commande (stabilisation, coût garanti, placement de pôles, rejet de perturbation...) sera assujettie à la résolution du problème d'optimisation paramétrique générique suivant:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \text{Trace}(RW) \\ & \text{sous } W \in \mathcal{C}. \end{aligned} \quad (12)$$

Notons que la contrainte $W \in \mathcal{C}$ conduit, dans une traduction en fonction des éléments de la matrice W (variables ou paramètres d'optimisation), à un ensemble de relations (inégalités) algébriques non linéaires par rapport à ces arguments. Or, il est bien connu que l'existence de contraintes non linéaires engendre en programmation non linéaire des difficultés pratiques non négligeables dans la mise en oeuvre des méthodes d'optimisation de type

descente, directions admissibles Le caractère convexe des relations définissant \mathcal{C} , nous a conduit à mettre en oeuvre une technique de plans de coupe qui revient itérativement à "circonscrire" le domaine paramétrique au moyen de contraintes inégalités linéaires. Le critère étant lui même linéaire, la résolution de (12) se fait par une séquence de problèmes de programmation linéaire. Bien sûr, cette approche présente l'inconvénient d'être à structure variable ; au fil des itérations l'ensemble des contraintes croît, néanmoins, du fait de l'existence de moyens numériques conviviaux de plus en plus performants, l'approche proposée permet de résoudre nombre de problèmes non triviaux. Le schéma général de l'algorithme à base de programmation linéaire et techniques de plans de coupe, agrémenté de quelques remarques de mise en oeuvre, est fourni dans [14].

4. Incertitudes de type polyédrique

Nous regroupons dans cette partie la plupart des résultats concernant la commande robuste, l'incertitude étant de type polyédrique. La démonstration des divers résultats sera suggérée plutôt que développée en détail. Les références fournissent au lecteur intéressé le moyen d'approfondir sa connaissance dans le domaine. Nous rappelons la forme générale des systèmes auxquels nous nous intéressons dans ce paragraphe:

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu \quad (13)$$

avec :

$$A \in D_A = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n,n}, A = \sum_{i=1}^{n_A} \lambda_i A_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n_A} \lambda_i = 1 \right\} \quad (14)$$

$$B \in D_B = \left\{ B \in \mathbb{R}^{n,m}, B = \sum_{i=1}^{n_B} \mu_i B_i, \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n_B} \mu_i = 1 \right\} \quad (15)$$

4.1. Stabilisation robuste

Compte tenu de ce qui précède, on peut définir un domaine d'incertitude pour la matrice F :

$$D_F = \{F \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}, \\ F = \sum_{i=1}^{n_F} \gamma_i F_i, \gamma_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n_F} \gamma_i = 1\} \quad (16)$$

Soit \mathcal{K}_{SQ} l'ensemble des gains de retour d'état qui stabilisent quadratiquement le système incertain (13).

Théorème 2 :

i) L'ensemble des matrices \mathcal{C}_{SQ} défini par :

$$\mathcal{C}_{SQ} = \{W \in \mathcal{W}; z'(F_k W + W F_k')z < 0, \\ \forall z \in \mathcal{N}, \forall k = 1, \dots, n_F\} \quad (17)$$

est un cône convexe.

ii) l'ensemble des gains K qui stabilisent quadratiquement le système incertain est :

$$\mathcal{K}_{SQ} = \{K = W_2' W_1^{-1}, W \in \mathcal{C}_{SQ}\} \quad (18)$$

Démonstration. Pour i), elle découle du fait que l'intersection de cônes convexes est un cône convexe. Pour ii), la démonstration n'est pas éloignée de celle faite pour le théorème 1 partant du fait que par combinaison linéaire convexe des relations (17) écrites aux sommets du polyèdre D_F , on montre que (17) est satisfaite, avec la même matrice W , pour toute matrice $F \in D_F$. \square

Le résultat énoncé dans ce théorème fournit bien un résultat de stabilisation quadratique par retour d'état car $\forall A \in D_A, \forall B \in D_B$, il existe un gain unique $K = W_2' W_1^{-1}$ et une fonction quadratique de Lyapunov unique $V(x) = x' W_1^{-1} x$.

Il faut noter que, comme annoncé dans le paragraphe 3, l'ensemble \mathcal{K}_{SQ} qui paramétrise l'ensemble des retours "quadratiquement robustes" sur un ensemble compact D_F est défini au moyen d'un nombre fini de relations convexes en W . Ceci permet alors d'envisager les problèmes d'optimisation paramétriques associés du type :

$$\text{Min Trace}(W) \\ \text{sous } W \in \mathcal{C}_{SQ} \quad (19)$$

L'exigence de stabilité est dans un sens minimale et ne confère pas au système commandé,

les performances qui sont usuellement requises pour une commande satisfaisante. Les paragraphes suivants vont s'attacher à résoudre des problèmes permettant d'assurer un certain type de performances.

4.2. Le problème LQ et la commande à coût garanti

Dans le domaine de la commande des systèmes linéaires invariants dans le temps, le problème LQ dans le cas déterministe est un problème de base duquel ont découlé nombre de contributions. L'importance de ce problème tient au fait qu'il conduit à une solution du type boucle fermée au moyen d'un "outil" systématique et aisé d'utilisation : l'équation de Riccati. Elle constitue une sorte de référence par rapport à laquelle peuvent s'évaluer les autres techniques de synthèse. Dans ce paragraphe, nous nous attachons à aborder ce problème classique dans l'optique de la paramétrisation proposée au paragraphe précédent pour la classe des gains stabilisants et que nous modifions légèrement par la suite.

$$\mathcal{C}_S = \{W \in \mathcal{W}; z'(FW + W F' + Q)z < 0, \\ \forall z \in \mathcal{N}\} \quad (20)$$

où :

$$Q = \begin{pmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_0 = X_0' > 0, \quad X_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\mathcal{K}_S = \{K = W_2' W_1^{-1}, W \in \mathcal{C}_S\}$$

L'équivalence entre cette paramétrisation et celle proposée par le théorème 1 découle de la structure de cône définie par (9). Soit le problème LQ défini par:

$$J^*(u^*) = \text{Min}_u \left[\int_0^\infty (x' C' C x + u' R u) dt \right] \\ \text{sous } \dot{x} = Ax + Bu, \quad x_0 \quad (21)$$

Sous les hypothèses (A, C) observable, $R > 0$, la solution optimale du problème est connue comme solution de retour d'état $u = Kx$ où K s'exprime en fonction de la matrice définie positive solution de l'équation de Riccati algébrique:

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + C'C = 0 \quad (22)$$

et $K = -R^{-1}B'P$. Sous les hypothèses faites $K \in \mathcal{K}_S$. On peut donc envisager la recherche de la solution du problème (21) dans l'ensemble paramétrique \mathcal{K}_S et résoudre

$$J^*(K^*) = \min_{K \in \mathcal{K}_S} \left[\int_0^\infty x'(C'C + K'RK)x dt \right] \quad \text{sous } \dot{x} = (A + BK)x, \quad x_0 \quad (23)$$

de manière équivalente:

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \min [Trace(PX_0)] \\ K \in \mathcal{K}_S \\ \text{sous } (A + BK)'P + P(A + BK) + \\ C'C + K'RK = 0 \end{array} \right. \quad (24)$$

ou

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} \min [Trace(C'C + K'RK)V] \\ K \in \mathcal{K}_S \\ \text{sous } (A + BK)'V + \\ V(A + BK) + X_0 = 0 \end{array} \right. \quad (25)$$

En fait, le problème défini en (23) est convexe en K mais non-strictement convexe; ceci entraîne que la solution optimale u^* de (21) peut se réaliser au moyen de retours d'état, $u^* = K(x_0)x$ non uniques, classe dépendant de la condition initiale x_0 mais dans laquelle figure la solution optimale dérivée de l'équation de Riccati (22). Un moyen classique pour s'affranchir de cette dépendance et faire en sorte que la solution du problème (23) (ou de manière équivalente (24) ou (25)) soit unique et donc égale à la solution de Riccati est de prendre pour X_0 une matrice définie positive ce qui revient à calculer la solution optimale de (23) quel que soit x_0 . Pour introduire naturellement cette contrainte, on peut par exemple considérer que x_0 est une variable aléatoire (uniformément distribuée sur la sphère unité) et considérer la minimisation de l'espérance mathématique du critère quadratique.

Le lagrangien du problème (24) s'écrit dans une formulation matricielle définissant la matrice des multiplicateurs de Lagrange Λ associée à la relation d'égalité :

$$L(K, P, \Lambda) = \text{Trace} [PX_0 + \Lambda((A + BK)'P + P(A + BK) + C'C + K'RK)] \\ L(K, P, \Lambda) = \text{Trace} [(C'C + K'RK)\Lambda + P((A + BK)\Lambda + \Lambda(A + BK)' + X_0)] \quad (26)$$

Ces deux expressions expriment le fait que la matrice des multiplicateurs Λ pour le problème (24) n'est autre que V et réciproquement, P apparaît comme celle des multiplicateurs de Lagrange pour le problème (25). Bien que de peu d'utilité pour la suite nous rappelons les conditions nécessaires d'optimalité (qui en fait sont également suffisantes):

$$\frac{\partial L}{\partial K} = [RK + B'P]V = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial V} = (A + BK)'P + P(A + BK) + C'C + K'RK = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial P} = (A + BK)'V + V(A + BK) + X_0 = 0 \quad (27)$$

Si $X_0 > 0$, $V > 0$ et $\frac{\partial L}{\partial K} = 0$ alors

$$K = -R^{-1}B'P$$

d'où la solution de Riccati. En fait écrivons (P_2) sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min [Trace(C'CV + RKVV^{-1}VK')] \\ K \in \mathcal{K}_S \\ \text{sous } (A + BK)V + V(A + BK)' + X_0 = 0 \end{array} \right. \quad (28)$$

soit de manière équivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min [Trace(C'CV + R\tilde{V}'V^{-1}\tilde{V})] \\ K \in \mathcal{K}_S \\ \text{sous } AV + VA' + B\tilde{V}' + \tilde{V}B' + X_0 = 0 \end{array} \right. \quad (29)$$

avec $\tilde{V} = VK'$ et $V > 0$, ce qui peut s'écrire encore:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min [Trace \left(\begin{array}{cc} C'C & 0 \\ 0 & R \end{array} \right) W] \\ W \in \mathcal{W} \\ \text{sous } AV + VA' + B\tilde{V}' + \tilde{V}B' + X_0 \leq 0 \end{array} \right. \quad (30)$$

car :

$$\begin{aligned} & \bullet W = \begin{pmatrix} V & \tilde{V} \\ \tilde{V}' & W_3 \end{pmatrix} \geq 0 \implies \\ & W_3 \geq \tilde{V}' V^{-1} \tilde{V} \\ & \bullet V_1, V_2 > 0, \\ & \begin{cases} AV_1 + V_1 A' + B \tilde{V}'_1 + \tilde{V}_1 B' + X_0 = 0 \\ AV_2 + V_2 A' + B \tilde{V}'_2 + \tilde{V}_2 B' + X_0 \leq 0 \\ V_2 \geq V_1 \end{cases} \implies \end{aligned}$$

Or, les contraintes de (30) sont en fait exprimées dans (20) et donc le problème LQ peut se résoudre au moyen du problème d'optimisation paramétrique convexe:

$$\begin{cases} \min [Trace \begin{pmatrix} C'C & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} W] \\ W \in \mathcal{C}_S \end{cases} \quad (31)$$

La résolution se fait par utilisation de la technique des plans de coupe, ce qui conduit à la considération d'une séquence de problèmes en programmation linéaire.

Une manière dans ce contexte de contrôler les performances pour le cas de systèmes incertains est de rechercher une commande qui borne les variations du critère quadratique sur le domaine d'incertitude. C'est ce problème qui a été abordé dans l'étude du problème de commande à coût garanti. L'approche paramétrique proposée donne une réponse à ce problème en fournissant une borne minimale du critère LQ pour un domaine d'incertitude donné par (3, 4).

Soit le problème LQ (21), A et B étant des matrices incertaines appartenant aux domaines D_A et D_B respectivement. On se propose de déterminer une commande de retour d'état robuste et une borne μ pour le critère quadratique telle que:

$$J(u) < \mu, \quad \forall (A, B) \in D_A \times D_B \text{ et } u = Kx$$

Théorème 3 : [15]

Soit :

$$W^* = \text{Arg} \left[\begin{array}{l} \min [Trace \begin{pmatrix} C'C & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} W] \\ W \in \mathcal{C}_{SR} \end{array} \right] \quad (32)$$

où :

$$\mathcal{C}_{SR} = \{ W \in \mathcal{W}; z'(F_k W + W F_k' + Q)z < 0, \\ \forall z \in \mathcal{N}, k = 1, \dots, n_F \}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mu &= Trace \begin{pmatrix} C'C & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} W^*, \\ \text{et } K^* &= W_2'^* W_1^{*-1} \end{aligned}$$

donnent une solution de la commande à coût garanti.

Démonstration. Dans le cas où $\mathcal{C}_{SQ} \neq \emptyset$ (sinon le système incertain n'est pas stabilisable quadratiquement), $\forall (A, B) \in D_A \times D_B$, $J^* = Trace[(C'C + K^* R K^*)V]$ où V est la solution de $(A + B K^*)V + V(A + B K^*)' + X_0 = 0$, $J \leq Trace[(C'C + K^* R K^*)W_1^*] = \mu$ car $W_1^* \geq V$. □

4.3. Placement de pôles

On fixe bien évidemment des performances pour un système commandé lorsqu'on assigne une certaine localisation aux modes du système en boucle fermée. En pratique, il n'est pas en général nécessaire de définir une localisation précise pour ces modes, mais il suffit plutôt de déterminer les régions du plan complexe dans lesquelles devront se situer les modes du système commandé. C'est d'ailleurs ce problème "relaxé" qui est le seul envisageable sérieusement dans le cas incertain.

Nous rappelons ci-après quelques résultats qui permettent d'écrire analytiquement des conditions (nécessaires et suffisantes) pour l'appartenance d'un spectre matriciel à une région donnée du plan complexe. Cette méthode est connue sous le nom de "méthode de Lyapunov généralisée". La région du plan complexe sera décrite par:

$$\Omega = \{x + jy : \sum_{k,l} f_{kl} x^k y^l < 0\} \quad (33)$$

On peut alors énoncer le théorème suivant:

Théorème 4 : [22]

Soit $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $\sigma(M)$ son spectre. $\sigma(M) \in \Omega$ si et seulement si $\forall Q = Q^* > 0$, il existe

une matrice $P = P^*$ définie positive solution de l'équation de Lyapunov généralisée :

$$\sum_{k,l} \phi_{kl} M^k P M^{*l} = -Q \quad (34)$$

où ϕ_{ij} sont les coefficients du polynôme $\Phi(\mu, \bar{\mu})$ définis par :

$$\Phi(\mu, \bar{\mu}) = \sum_{k,l} \phi_{kl} \mu^k \bar{\mu}^l = \sum_{i,j} f_{ij} \left(\frac{\mu + \bar{\mu}}{2}\right)^k \left(\frac{\mu - \bar{\mu}}{2j}\right)^l \quad (35)$$

Ainsi avec $\Omega_\alpha = \{x + jy, x + \alpha < 0\}$, il vient:

$$2\alpha P + MP + PM^* = -Q$$

soit

$$(M + \alpha I)P + P(M + \alpha I)^* = -Q$$

Avec $R_{r,\alpha} = \{x + jy, (x - \alpha)^2 + y^2 = r^2\}$ (cercle de rayon r et de centre α), il vient la condition :

$$(M - \alpha I)P(M - \alpha I)^* / r^2 - P = -Q$$

Revenant au système (1), on désigne par \mathcal{K}_A l'ensemble des gains qui assignent les modes de (1) dans le cercle $R_{r,\alpha}$ et définissons :

$$\mathcal{C}_A = \{W \in \mathcal{W}, z'[F_\alpha W F'_\alpha - W]z < 0, \forall z \in \mathcal{N}\} \quad (36)$$

où :

$$F_\alpha = \begin{pmatrix} (A - \alpha I)/r & B/r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 5 : [16]

i) \mathcal{C}_A est un ensemble convexe (un cône)

ii) $\mathcal{K}_A = \{K = W_2' W_1^{-1}, W \in \mathcal{C}_A\}$

Démonstration. La convexité de l'ensemble \mathcal{C}_A découle directement de la linéarité par rapport à W . ii) est établie en développant la relation (36) et en raisonnant de manière très similaire que pour la démonstration du théorème 1. \square

L'extension du résultat précédent au cas incertain se fait de manière directe et l'on obtient alors une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de gains qui assignent quadratiquement le spectre de systèmes incertains dans la région circulaire du plan complexe $R_{r,\alpha}$. Soit:

$$\mathcal{K}_{AQ} = \{K : \forall Q > 0 \exists P > 0 : (A + BK - \alpha I) P (A + BK - \alpha I)' / r^2 - P = -Q, \forall A, B \in D_A \times D_B\}$$

et

$$\mathcal{C}_{AQ} = \{W \in \mathcal{W}, z'[F_{\alpha k} W F'_{\alpha k} - W]z < 0, \forall z \in \mathcal{N}, k = 1 \dots n_F\} \quad (37)$$

où

$$F_{\alpha k} = \begin{pmatrix} (A_k - \alpha I)/r & B_k/r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 6 : [16]

i) \mathcal{C}_{AQ} est un cône convexe

ii) $\mathcal{K}_{AQ} = \{K = W_2' W_1^{-1}, W \in \mathcal{C}_{AQ}\}$

La convexité de l'ensemble paramétrique définissant \mathcal{W} permet ici aussi, de définir un problème d'optimisation non linéaire convexe. Par exemple, combinant la condition précédente au problème d'optimisation défini au paragraphe précédent, on est à même de résoudre un problème de commande à coût garanti et contrainte de localisation de pôles [16].

D'autres régions peuvent être considérées pour le placement de pôles, les conditions s'écrivant toujours sous la forme de relations convexes en W , ce qui fournit une paramétrisation convexe de la classe des gains recherchés [16].

4.4. Rejet de perturbation

Une autre manière de tenir compte de contraintes en performances pour le système, consiste à atténuer l'effet d'une perturbation (qui est dans le cas général un signal exogène) sur la sortie du système. Il s'agit du problème fondamental du "rejet de perturbations" abondamment étudié dans la littérature. Une façon de

l'aborder consiste à assurer une contrainte sur la norme H^∞ de la matrice de transfert entre la perturbation et la sortie commandée. Dans ce paragraphe, une solution au problème du rejet de perturbation est proposée. On se place dans la logique des paragraphes précédents qui consiste à utiliser la paramétrisation des gains introduite dans le paragraphe 2. Considérons le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + D w(t) \\ z(t) = E x(t) \end{cases} \quad (38)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ la commande, $z(t) \in \mathbb{R}^r$ la sortie commandée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie mesurée et $w(t) \in \mathbb{R}^l$ la perturbation. Dans un premier temps le problème à résoudre est le suivant:

Trouver $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tel que:

P_{11}) $(A + BK)$ soit stable quadratiquement

P_{12}) $\|E(s1 - A - BK)D\|_\infty \leq \gamma$, $\gamma > 0$

Soient :

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{E} = (E \ 0) \quad (39)$$

Si l'on définit :

$$\mathcal{K}_\infty = \{K \in \mathbb{R}^{m \times n} : P_{11} \text{ et } P_{12} \text{ soient satisfaites}\} \quad (40)$$

et l'ensemble suivant :

$$\mathcal{C}_\infty = \{W \in \mathcal{W}, z'[FW + WF' + \gamma^{-1}W\bar{E}'\bar{E}W + \gamma^{-1}\bar{D}\bar{D}']z, \forall z \in \mathcal{N}\} \quad (41)$$

on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème 7 : [10]

- i) \mathcal{C}_∞ est un ensemble convexe
- ii) $\mathcal{K}_\infty = \{K = W_2'W_1^{-1} : W \in \mathcal{C}_\infty\}$

Démonstration. i) \mathcal{C}_∞ est l'intersection d'ensembles convexes et est, par conséquent, convexe. ii) Développer l'expression (41) sur l'ensemble des $z \in \mathcal{N}$ conduit à :

$$AW_1 + W_1A' + BW_2' + W_2B' + \gamma^{-1}W_1E'EW_1 + \gamma^{-1}DD' < 0$$

d'où :

$$(A + BW_2W_1^{-1})'W_1^{-1} + W_1^{-1}(A + BW_2W_1^{-1}) + \gamma^{-1}W_1^{-1}DD'W_1^{-1} + \gamma^{-1}E'E < 0$$

$\exists Q = Q' > 0$ telle que l'on ait :

$$A_c'P + PA_c + \gamma^{-1}PDD'P + \gamma^{-1}E'E + Q = 0$$

Et donc P_{11} et P_{12} sont satisfaites et $K = W_2'W_1^{-1}$.

□

Considérons maintenant le cas où le modèle du système est incertain. On a alors $A \in D_A$, $B \in D_B$ et donc $F \in D_F$ pour le système étendu. Le problème que l'on souhaite résoudre est alors:

Trouver $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tel que:

P_{21}) $(A + BK)$ soit stable quadratiquement, $\forall A \in D_A, B \in D_B$

P_{22}) $\|E(s1 - A - BK)D\|_\infty \leq \gamma$, $\gamma > 0$, $\forall A \in D_A, B \in D_B$

Comme précédemment, nous pouvons définir les ensembles suivants:

$$\mathcal{K}_{\infty Q} = \{K \in \mathbb{R}^{m \times n} : P_{21} \text{ et } P_{22} \text{ soient satisfaites}\} \quad (42)$$

$$\mathcal{C}_{\infty Q} = \{W \in \mathcal{W}, z'[F_k W + WF_k' + \gamma^{-1}W\bar{E}'\bar{E}W + \gamma^{-1}\bar{D}\bar{D}']z, \forall z \in \mathcal{N}, k = 1, \dots, n_F\} \quad (43)$$

Théorème 8 . [10]

i) $C_{\infty Q}$ est un ensemble convexe

ii) $\{K = W_2'W_1^{-1} : W \in C_{\infty Q}\} \subseteq \mathcal{K}_{\infty Q}$

Etant donné que le problème du rejet de perturbations tel qu'il est formulé ici revient à chercher une matrice définie positive dans un ensemble convexe, on peut associer un problème d'optimisation convexe en vue de déterminer cette matrice.

5. Incertitudes de type bornées en norme

Dans cette partie, les systèmes incertains que nous considérons, sont décrits par les équations d'état suivantes:

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u \quad (44)$$

avec :

$$(\Delta A \quad \Delta B) = D\Delta(t)(E_1 \quad E_2), \quad \Delta(t) \in \mathcal{F}$$

5.1. Stabilisation robuste

Définissons :

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{E} = (E_1 \quad E_2)$$

et l'ensemble suivant :

$$C_{SQ} = \{W \in \mathcal{W}, z'[FW + WF' + W\bar{E}'\bar{E}W + \bar{D}\bar{D}']z < 0, \forall z \in \mathcal{N}\} \quad (45)$$

Désignons par \mathcal{K}_{SQ} , l'ensemble des gains de retour d'état qui stabilisent quadratiquement le système.

Théorème 9 :

i) C_{SQ} est un ensemble convexe

ii) $\mathcal{K}_{SQ} = \{K = W_2'W_1^{-1} : W \in C_{SQ}\}$

Démonstration. La démonstration de i) est immédiate. Pour ii), le système est quadratiquement stabilisable si et seulement s'il existe $P = P' > 0 \in \mathbb{R}^{(n+m).(n+m)}$ et $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m.(m+n)}$ tel que :

$$(F + \bar{D}\Delta(t)\bar{E} + GK)P + P(F + \bar{D}\Delta(t)\bar{E} + GK)' < 0 \quad (46)$$

pour $\Delta(t) \in \mathcal{F}$. ceci implique :

$$\{z'(F + \bar{D}\Delta(t)\bar{E})P + P(F + \bar{D}\Delta(t)\bar{E})'\}z < 0 \quad (47)$$

$z \in \mathcal{N}$ and $\Delta(t) \in \mathcal{F}$. Alors :

$$z'[(F + \bar{D}\Delta(t)\bar{E})P + P(F + \bar{D}\Delta(t)\bar{E})']z < 0 \quad (48)$$

pour tout $z \in \mathcal{N}$, $\Delta(t) \in \mathcal{F}$. Ce qui est équivalent à :

$$z'(FP + PF')z < -2z'P\bar{E}'\Delta(t)\bar{D}'z \quad (49)$$

pour tout $z \in \mathcal{N}$ and $\Delta(t) \in \mathcal{F}$. \implies

$$z'(FP + PF')z < \begin{matrix} -2Max \\ \{\Delta'(t)\Delta(t) \leq I\} \end{matrix} z'P\bar{E}'\Delta(t)\bar{D}'z \leq 0 \quad (50)$$

pour tout $z \in \mathcal{N}$. D'après le lemme 3.1 de Petersen [26], (50) conduit à :

$$\{z'(FP + PF')z\}^2 > 4z'P\bar{E}'\bar{E}Pzz'\bar{D}\bar{D}'z \quad (51)$$

pour tout $z \in \mathcal{N}$. En écrivant:

$$\begin{matrix} X = P\bar{E}'\bar{E}P \geq 0 \\ Y = FP + PF' < 0 \\ Z = \bar{D}\bar{D}' \geq 0 \end{matrix} \quad (52)$$

et d'après le lemme 3.2 dans [26], il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$z'(\lambda^2 P\bar{E}'\bar{E}P + \lambda(FP + PF') + \bar{D}\bar{D}')z < 0 \quad (53)$$

pour tout $z \in \mathcal{N}$. Soit $W = \lambda P$, (53) devient :

$$z'(F.W + W.F' + W.\bar{E}'\bar{E}.W + \bar{D}.\bar{D}')z < 0 \quad (54)$$

pour tout $z \in \mathcal{N}$.

Pour la suffisance, supposons qu'il existe W vérifiant (54). Alors pour tout $F \in D_F$ et tout $z \in \mathcal{N}$, on a:

$$z'(F.W + W.F' + W.\bar{E}'\bar{E}.W + \bar{D}.\bar{D}')z < 0 \quad (55)$$

Soit la fonction de Lyapunov $V(x) = x'W_1^{-1}x$ et le système en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = [(A+\Delta A) + (B+\Delta B)W_2'W_1^{-1}]x(t) \quad (56)$$

on a :

$$\dot{V}(x) = x'[(A+\Delta A)' + W_1^{-1}W_2(B+\Delta B)']W_1^{-1}x + x'W_1^{-1}[(A+\Delta A) + (B+\Delta B)W_2'W_1^{-1}]x \quad (57)$$

que l'on l'écrit :

$$\dot{V}(x) = [x'W_1^{-1}0] \left\{ \begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{pmatrix} (F+\Delta F)' + (F+\Delta F) \begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{pmatrix} \right\} \begin{bmatrix} W_1^{-1}x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

D'autre part :

$$W\bar{E}'\bar{E}W + \bar{D}\Delta(t)\Delta(t)'\bar{D}' \geq W\bar{E}'\Delta(t)'\bar{D}' + \bar{D}\Delta(t)\bar{E}W \quad (59)$$

Avec (59), il vient :

$$\dot{V}(x) \leq [x'W_1^{-1}0](FW + WF' + W\bar{E}'\bar{E}W + \bar{D}\bar{D}') \begin{bmatrix} W_1^{-1}x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

La condition (55) conduit à :

$$\dot{V}(x) \leq [x'W_1^{-1}0]Q_e \begin{bmatrix} W_1^{-1}x \\ 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (61)$$

avec $Q_e = FW + WF' + W\bar{E}'\bar{E}W + \bar{D}\bar{D}'$ et le théorème est démontré. \square

5.2. Commande à coût garanti

Comme il a été souligné à plusieurs reprises, la prise en compte de contraintes de performance peut se faire par la définition d'un critère de type norme H_2 (L.Q.). Dans ce paragraphe, une solution au problème de commande à coût garanti pour les systèmes incertains avec incertitude bornée en norme est proposée. Soit le système décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + D\Delta E_1)x + (B_2 + D\Delta E_2)u + B_1w \\ u &= Kx \\ z &= Cx + Hu \end{aligned} \quad (62)$$

Nous supposons que $C'H = 0, H'H > 0$. F et G ont déjà été définies précédemment. D'autre part soient :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{E} = (E_1 \ E_2) \\ Q &= \begin{pmatrix} B_1B_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(n+m) \times (n+m)}, \\ R &= \begin{pmatrix} C'C & 0 \\ 0 & H'H \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(n+m) \times (n+m)} \end{aligned}$$

Nous pouvons définir les matrices en boucle fermée :

$$A_c = A + B_2K, \quad C_c = C + HK$$

La matrice de transfert entre w et z s'exprime par :

$$H_\Delta(s) = C_c[sI - A_c - D\Delta(E_1 + E_2K)]^{-1}B_1$$

Soit \mathcal{K}_{SQ} l'ensemble des gains qui stabilisent quadratiquement le système. Si $K \in \mathcal{K}_{SQ}$, la norme H_2 de $H_\Delta(s)$ est alors obtenue par :

$$\|H_\Delta\|_2^2 = \text{Trace}(C_cL_c(\Delta)C_c') = \text{Trace}(B_1'L_o(\Delta)B_1)$$

où $L_c(\Delta)$ et $L_o(\Delta)$ sont les grammians de commandabilité et d'observabilité respectivement solutions de :

$$\begin{aligned} [A_c + D\Delta(E_1 + E_2K)]L_c(\Delta) + L_c(\Delta)[A_c + D\Delta(E_1 + E_2K)]' + B_1B_1' &= 0 \\ [A_c + D\Delta(E_1 + E_2K)]'L_o(\Delta) + L_o(\Delta)[A_c + D\Delta(E_1 + E_2K)] + C_c'C_c &= 0 \end{aligned}$$

Le problème que l'on se propose de résoudre est le suivant :

Trouver K et $0 \leq \mu < \infty$ tel que $K \in \mathcal{K}_{SQ}$ et $\|H_\Delta\|_2^2 \leq \mu, \forall \Delta \in \mathcal{F}$, notre but étant de déterminer μ aussi petit que possible.

La résolution de ce problème passe par la définition de l'ensemble suivant :

$$C_{QS}(\epsilon) = \{W \in \mathcal{W} : z'(FW + WF' + \epsilon^{-1}W E' E W + \epsilon D D' + Q)z < 0, \forall z \in \mathcal{N}, \epsilon > 0\} \quad (63)$$

Théorème 10 :

L'ensemble $\mathcal{C}_{QS}(\epsilon)$ est convexe et le système est quadratiquement stabilisable si et seulement s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathcal{C}_{QS}(\epsilon) \neq \emptyset$.

Démonstration: voir [13]

On peut alors à partir du théorème précédent déduire le résultat suivant:

Théorème 11 :

Supposons que le système soit quadratiquement stabilisable et soit:

$$\mathcal{E} = \{\epsilon > 0 : \mathcal{C}_{QS}(\epsilon) \neq \emptyset\}$$

alors :

$$\mathcal{K}_{QS} = \{K = W_2' W_1^{-1} : W \in \mathcal{C}_{QS}(\epsilon), \epsilon \in \mathcal{E}\} \quad (64)$$

Démonstration: voir [13]

Il est possible maintenant de montrer que si le système est quadratiquement stabilisable et $W \in \mathcal{C}_{QS}(\epsilon)$, alors W_1 est une borne supérieure pour le grammien $L_c(\Delta)$, $\forall \Delta \in \mathcal{F}$.

Lemme 1 :

Si le système est quadratiquement stabilisable alors il existe ϵ tel que $\mathcal{C}_{QS}(\epsilon) \neq \emptyset$. Soit $W \in \mathcal{C}_{QS}(\epsilon)$ et le gain correspondant $K = W_2' W_1^{-1} \in \mathcal{K}_{QS}$. On a :

$$W_1 > L_c(\Delta), \quad \forall \Delta \in \mathcal{F}$$

Démonstration: voir [13]

On peut maintenant énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 12 :

Soit

$$(\hat{W}, \hat{\epsilon}) = \text{Arg} \left\{ \min_{(W, \epsilon)} [\text{Trace} (R W)] \right\}, \\ W \in \mathcal{C}_{QS}(\epsilon)$$

Alors :

$$K = \hat{W}_2' \hat{W}_1^{-1} \quad \mu^2 = \text{Trace} (R \hat{W})$$

sont solutions du problème de coût garanti.

5.3. Placement de pôles

Dans ce paragraphe, le problème du placement de pôles dans un disque pour les systèmes continus avec incertitude bornée en norme est résolu. Les disques considérés sont situés dans le demi plan gauche et sont caractérisés par leur centre α et leur rayon r . Soient :

$$A_r = (A - \alpha \mathbf{1})/r, \quad B_r = B/r \\ F_r = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_r = \begin{pmatrix} D/\sqrt{r} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ E_r = (E_1/\sqrt{r} \quad E_2/\sqrt{r}), \quad G_r = (0 \quad \mathbf{1})'$$

En utilisant le théorème relatif à l'équation généralisée de Lyapunov, nous pouvons déduire le lemme suivant:

Lemme 2 :

Soit $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $\sigma(M)$ son spectre, alors $\sigma(M)$ est inclus dans le disque de rayon r et de centre α si et seulement s'il existe $P = P^* > 0$ telle que :

$$M_r P M_r^* - P < 0$$

On peut noter que le disque est une région qui présente un bon compromis puisqu'il est possible de contrôler l'amortissement et la rapidité des modes du système.

Dans le cas des systèmes incertains, on peut utiliser le lemme précédent pour définir une notion proche de la stabilisabilité quadratique, "l'assignabilité quadratique dans un disque" [16], [10] et qui est fondée sur l'existence d'une solution unique à l'équation de Lyapunov généralisée pour toute réalisation possible du système à l'intérieur du domaine d'incertitude.

Soit \mathcal{K}_{AQ} , l'ensemble des gains qui assignent quadratiquement les modes du système en boucle fermée à l'intérieur du disque de centre α et de rayon r . Définissons:

$$\mathcal{N}_{AQ} = \{X \in \mathbb{R}^{2(n+m)}, X \neq 0 : [G_r' \quad 0]X = 0\}$$

$$\mathcal{C}_{AQ} = \{W > 0 : \\ X' \begin{pmatrix} -W + D_r D_r' & F_r W \\ W F_r' & -W + W E_r' E_r W \end{pmatrix} X < 0, \quad \forall X \in \mathcal{N}_{AQ}\}$$

$$S = W^{-1}$$

Théorème 13 :

i) \mathcal{C}_{AQ} est un ensemble convexe

ii) $\mathcal{K}_{AQ} = \{K = W_2'W_1^{-1} : W \in \mathcal{C}_{AQ}\}$

Démonstration: i) est immédiat. ii) Pour la nécessité qui est assez longue à obtenir, nous renvoyons le lecteur à [10]. Montrons la suffisance. Soit $W \in \mathcal{C}_{AQ}$, alors on a:

$$X' \begin{pmatrix} -W + D_r D_r' & F_r W \\ W F_r' & -W + W E_r' E_r W \end{pmatrix} X < 0, \quad \forall X \in \mathcal{N}_{AQ}$$

D'après le lemme de Finsler [11], il existe $R_r^{-1} > 0$ telle que:

$$\begin{pmatrix} -W + D_r D_r' - G_r R_r^{-1} G_r' & F_r W \\ W F_r' & -W + W E_r' E_r W \end{pmatrix} < 0$$

En multipliant à droite et à gauche par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W^{-1} \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$\begin{pmatrix} -S^{-1} + D_r D_r' - G_r R_r^{-1} G_r' & F_r \\ F_r' & -S + E_r' E_r \end{pmatrix} < 0$$

Et donc il existe $Q_r > 0$ telle que :

$$F_r'(S^{-1} - D_r D_r' + G_r R_r^{-1} G_r')^{-1} F_r - S + E_r' E_r + Q_r = 0$$

et d'après le théorème 4 dans [10], on peut conclure que le système est quadratiquement assignable dans le disque de centre α et de rayon r par une commande qui s'écrit:

$$u = W_2'W_1^{-1}x$$

□

5.4. Rejet de perturbations

Soit le système décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + D\Delta E_1)x + (B_2 + D\Delta E_2)u + D_1 w \\ z &= Ex \end{aligned} \quad (65)$$

où w est la perturbation et z la sortie commandée.

Le problème à résoudre est le suivant:

Trouver K tel que :

$P_1)$ $[A_c + D\Delta(E_1 + E_2K)]$ soit quadratiquement stable $\forall \Delta \in \mathcal{F}$

$P_2)$ $\|E[s1 - A_c - D\Delta(E_1 + E_2K)]^{-1}D_1\|_\infty \leq \gamma, \quad \gamma > 0$

En suivant la même démarche que dans les paragraphes précédents, définissons :

$$\begin{aligned} \bar{D}_1 &= \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{E}_1 = (E_1 \quad E_2), \\ \bar{D}_2 &= \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{E}_2 = (E \quad 0) \end{aligned}$$

De plus soient :

$\mathcal{K}_{\infty Q} = \{K \in \mathbb{R}^{m \times n} : P_1, P_2 \text{ satisfaites}\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\infty Q} = \{W \in \mathcal{W} : z'[FW + WF' + \\ W\bar{E}_1'\bar{E}_1W + \\ \gamma^{-1}W\bar{E}_2'\bar{E}_2W + \bar{D}_1\bar{D}_1' + \\ \gamma^{-1}\bar{D}_2\bar{D}_2']z < 0, \quad \forall z \in \mathcal{N}\} \end{aligned}$$

Théorème 14 : [4]

i) $\mathcal{C}_{\infty Q}$ est un ensemble convexe

ii) $\mathcal{K}_{\infty \Delta} = \{K = W_2'W_1^{-1} : W \in \mathcal{C}_{\infty Q}\} \subseteq \mathcal{K}_{\infty Q}$

Démonstration : i) est immédiat. ii) En développant l'inégalité qui définit $\mathcal{C}_{\infty Q}$, on obtient :

$$\begin{aligned} AW_1 + B_2W_2' + W_2B_2' + W_1A' + W_1E_1'E_1W_1 + \\ W_2E_2'E_2W_2' + W_1E_1'E_2W_2' + W_2E_2'E_1W_1 + \\ \gamma^{-1}W_1E'E_1W_1 + \gamma^{-1}D_1D_1' + DD' < 0 \end{aligned}$$

En multipliant de part et d'autre par W_1^{-1} et en posant $K = W_2'W_1^{-1}$, on a :

$$\begin{aligned} A'W_1^{-1} + W_1^{-1}B_2K + K'B_2'W_1^{-1} + E_1'E_1 + \\ K'E_2'E_2K + E_1'E_2K + K'E_2'E_1\gamma^{-1}E'E + \\ \gamma^{-1}W_1^{-1}D_1D_1'W_1^{-1} + W_1^{-1}DD'W_1^{-1} < 0 \end{aligned}$$

D'autre part compte tenu que :

$$\begin{aligned} W_1^{-1}D\Delta(E_1 + E_2K) + (E_1 + E_2K)\Delta'D'W_1^{-1} \leq \\ W_1^{-1}DD'W_1^{-1} + (E_1 + E_2K)'(E_1 + E_2K) \end{aligned}$$

on arrive à :

$$\begin{aligned} & [(A + \Delta A) + (B_2 + \Delta B_2)W_2'W_1^{-1}]'W_1^{-1} + \\ & W_1^{-1}[\bullet] + \gamma^{-1}W_1^{-1}D_1D_1'W_1^{-1} + \gamma^{-1}E'E \leq \\ & A'W_1^{-1} + W_1^{-1}B_2K + K'B_2'W_1^{-1} + E_1'E_1 + \\ & K'E_2'E_2K + E_1'E_2K + K'E_2'E_1W_1 + \gamma^{-1}E'E + \\ & \gamma^{-1}W_1^{-1}D_1D_1'W_1^{-1} + W_1^{-1}DD'W_1^{-1} < 0 \end{aligned}$$

d'où $K = W_2'W_1^{-1}$ stabilise quadratiquement le système et :

$$\|G(s)\|_\infty \leq \gamma$$

□

6. Exemple

Dans ce paragraphe, nous présentons l'application des techniques présentées précédemment sur un exemple tiré de [27]. Il s'agit du modèle incertain d'un avion. L'incertitude est de type polyédrique. Elle est caractérisée par 4 sommets sur A et 2 sommets sur B , soit :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.9896 & 17.4100 & 96.1500 \\ 0.2648 & -0.8512 & -11.3900 \\ 0 & 0 & -250.0000 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.9896 & 17.4100 & 96.1500 \\ 0.0820 & -0.6586 & -10.8100 \\ 0 & 0 & -250.0000 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0.6606 & 18.1100 & 84.3400 \\ 0.2648 & -0.8512 & -11.3900 \\ 0 & 0 & -250.0000 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -0.6606 & 18.1100 & 84.3400 \\ 0.0820 & -0.6586 & -10.8100 \\ 0 & 0 & -250.0000 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -97.7798 \\ 0 \\ 250.0000 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -85.1002 \\ 0 \\ 250.0000 \end{pmatrix}$$

Retour d'état

La procédure numérique converge en 95 itérations :

$$W = \begin{pmatrix} 0.1032 & -0.0182 & -0.0037 & -0.0075 \\ -0.0182 & 0.0085 & 0.0081 & -0.0063 \\ -0.0037 & 0.0081 & 0.0497 & -0.0204 \\ -0.0075 & -0.0063 & -0.0204 & 0.1036 \end{pmatrix} \quad (66)$$

$$K = (-0.2723 \quad -1.0785 \quad -0.2549) \quad (67)$$

La figure 1 montre la localisation des pôles dans le plan complexe pour les sommets du polyèdre.

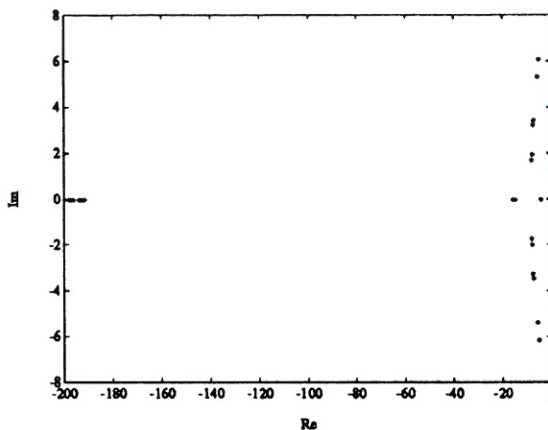


Figure 1: Poles en boucle fermée pour les sommets

Commande à coût garanti

Les matrices C et H choisies sont :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

l'algorithme converge en 65 itérations :

$$W = \begin{pmatrix} 0.1032 & -0.0182 & -0.0037 & -0.0075 \\ -0.0182 & 0.0085 & 0.0081 & -0.0063 \\ -0.0037 & 0.0081 & 0.0497 & -0.0204 \\ -0.0075 & -0.0063 & -0.0204 & 0.1036 \end{pmatrix} \quad (68)$$

$$K = (-0.2723 \quad -1.0785 \quad -0.2549) \quad (69)$$

Le coût garanti est donné par :

$$J(A(\cdot), B(\cdot)) = \int_0^\infty [x'C'Cx + u'H'Hu]dt \leq \text{Trace}(RW) = 1.1$$

$$\forall A \in \mathcal{D}_A, B \in \mathcal{D}_{B_2}$$

Pour les sommets la norme $\|H_2\|$ de la fonction de transfert est :

$$\begin{aligned}
 J(A_1, B_1) &= 0.244, & J(A_2, B_1) &= 0.246, \\
 J(A_3, B_1) &= 0.190, & J(A_4, B_1) &= 0.200, \\
 J(A_1, B_2) &= 0.423, & J(A_2, B_2) &= 0.412, \\
 J(A_3, B_2) &= 0.261, & J(A_4, B_2) &= 0.263
 \end{aligned}$$

Placement de pôles

Le placement de pôles est considéré pour différentes régions.

bande verticale

$$\alpha = -1, \beta = -10$$

$$W = \begin{pmatrix} 3.7809 & -0.4717 & 0.3368 & -0.3217 \\ -0.4717 & 0.2978 & 0.0548 & -0.0755 \\ 0.3368 & 0.0548 & 0.5239 & -0.5119 \\ -0.3217 & -0.0755 & -0.5119 & 0.5041 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} -0.0115 & -0.0952 & -0.9598 \end{pmatrix}$$

Les modes sont effectivement localisés dans la région considérée, voir figure 2.

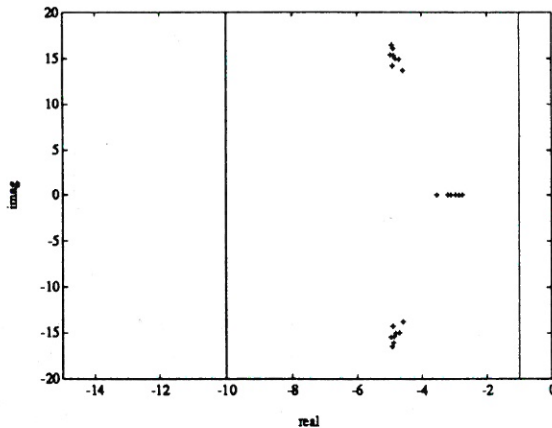


Figure 2: Bande verticale

Cercle

$$\alpha = -1, r = 4.5$$

$$W = \begin{pmatrix} 2.3400 & -0.2319 & 0.0181 & -0.0175 \\ -0.2319 & 0.0640 & 0.0163 & -0.0161 \\ 0.0181 & 0.0163 & 0.0129 & -0.0126 \\ -0.0175 & -0.0161 & -0.0126 & 0.0123 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} -0.0014 & -0.0137 & -0.9571 \end{pmatrix}$$

La figure 3 montre la localisation des pôles pour les sommets à l'intérieur du cercle.

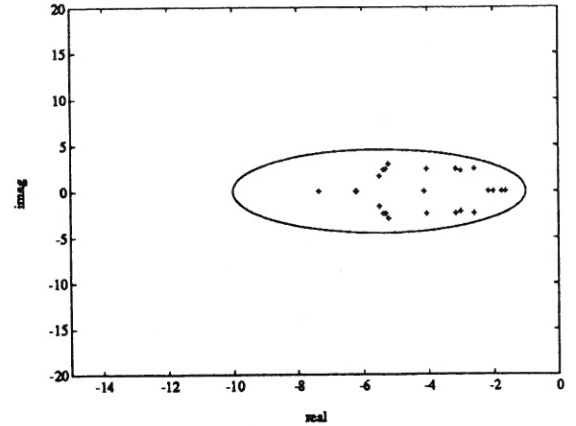


Figure 3: Région circulaire

secteur "circulaire"

$$r = 4.5, \alpha = -1, \beta = -5$$

$$W = 10^4 \cdot \begin{pmatrix} 1.4285 & -0.1443 & 0.0122 & -0.0119 \\ -0.1443 & 0.0332 & 0.0051 & -0.0051 \\ 0.0122 & 0.0051 & 0.0033 & -0.0033 \\ -0.0119 & -0.0051 & -0.0033 & 0.0032 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} -0.0009 & -0.0087 & -0.9697 \end{pmatrix}$$

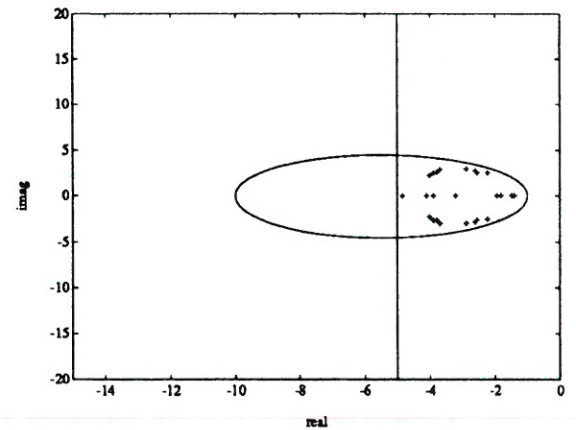


Figure 4: Secteur "circulaire"

Les modes pour les sommets sont à l'intérieur du secteur, figure 4.

Rejet de perturbation

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $\gamma = 0.23$ ($-13dB$), on a :

$$W = \begin{pmatrix} 1.2920 & -0.4389 & 0.0559 & 0.0189 \\ -0.4389 & 0.1522 & 0.0082 & 0.0270 \\ 0.0559 & 0.0082 & 0.4128 & 0.3770 \\ 0.0189 & 0.0270 & 0.3770 & 503.1236 \end{pmatrix}$$

$$K = (2.1856 \quad 6.4535 \quad 0.4890)$$

La figure 5 montre que pour les sommets du polyèdre, on a l'atténuation souhaitée.

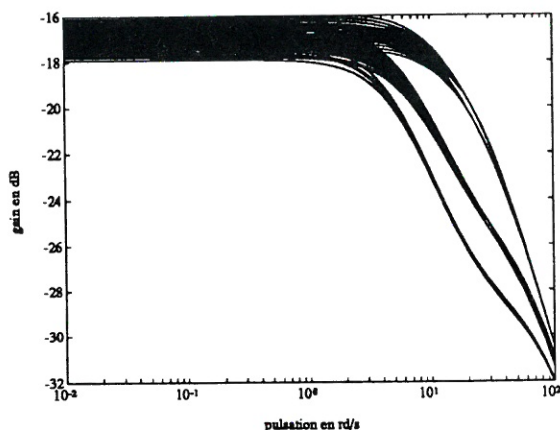


Figure 5: Représentation dans le plan de Bode du système incertain en boucle fermée

7. Conclusion

Cette communication a eu pour but de présenter une synthèse des problèmes de commande qui peuvent être abordés au moyen de l'approche quadratique. Cette synthèse a été menée dans le cadre des systèmes continus et dans l'optique du retour d'état, ce choix étant fait délibérément pour faciliter et réduire la présentation des résultats. Toutefois, nous envisageons dans ce qui suit les extensions déjà réalisées ou envisageables.

L'intérêt principal de cette approche est qu'elle débouche sur une méthode constructive pour la synthèse de commandes robustes. En effet, les gains recherchés découlent d'une paramétrisation dans des ensembles convexes, cette dernière propriété conduisant à l'utilisation de méthodes en programmation mathématique à convergence sûre. Tous les problèmes en programmation non-linéaire énoncés précédemment permettent d'élaborer des réponses du type : il n'existe pas de gains dans la classe définie ou bien il existe de tels

gains et en voici un qui, de plus, minimise le critère proposé.

Sur les ensembles paramétriques convexes peuvent être imposées des contraintes structurelles supplémentaires qui permettent le calcul de gains à contraintes de structure (décentralisation, retour de sortie). L'extension au cas des systèmes discrets ne présente pas de difficulté particulière de même quelques résultats peuvent être étendus au domaine des systèmes singuliers.

REFERENCES

1. ARZELIER, D., BERNUSSOU, J. and GARCIA, G., Pole Assignment of Linear Uncertain Systems in a Sector via a Lyapunov-type Approach, IEEE TRANS. ON AUT. CONT., 38(7), 1993.
2. BARMISH, B.R., Necessary and Sufficient Conditions for Quadratic Stabilizability of an Uncertain System, JOURNAL OPTIMI. THEORY APPL., 46(4), 1985.
3. BERNUSSOU, J., PERES, P. L. D. and GEROMEL, J. C., A Linear Programming Oriented Procedure for Quadratic Stabilization of Uncertain Systems, SYSTEMS AND CONTROL LETTERS, 13, 1989.
4. BERNUSSOU, J., GARCIA, G. and ARZELIER, D., Robust Constrained Control by Quadratic Stabilizability, 31-st IEEE CDC, Tucson, Arizona, 1992.
5. CHANG, S.S.L. and PENG, T.K.C., Adaptive Guaranteed Cost Control Systems with Uncertain Parameters, IEEE TRANS. ON AUTOMATIC CONTROL, 17(4), 1972.
6. DORATO, P., Robust Control, IEEE PRESS, 1987.
7. DOYLE, J.C., Guaranteed Margins for L.Q.G. Regulators, IEEE TRANS. AUTOMAT. CONTR., 1987.
8. DOYLE, J. C., GLOVER, K., KHARGONEKAR, P. P., FRANCIS, B. A., State Space Solutions to Standard H^2 and H^∞ Control Problems, IEEE TRANS. AUTOMAT. CONTR., 34(8), 1989.
9. GALIMIDI, A. R., BARMISH, B. R., The Constraint Lyapunov Problem and its

- Applications to Robust Output Feedback Stabilization**, IEEE TRANS. ON AUTOMATIC CONTROL, 31(5), 1983.
10. GARCIA, G. and BERNUSSOU, J., **Pole Assignment for Uncertain Systems in a Specified Disk by State Feedback**, Soumis à IEEE TRANS. ON AUTOMATIC CONTROL, 1993.
 11. GARCIA, G., BERNUSSOU, J. and ARZELIER, D., **Robust Stabilization of Discrete-Time Linear Systems with Norm-bounded Time-varying Uncertainty**, SYSTEMS AND CONTROL LETTERS, 1993.
 12. GARCIA, G., BERNUSSOU, J., CAMOZZI, P. and ARZELIER, D., **Stabilisation des Systèmes Incertains avec Rejet de Perturbation: Approche Quadratique**, RAIRO, 27(3), 1993.
 13. GARCIA, G., CAMOZZI, P. and BERNUSSOU, J., **H_2 Guaranteed Cost Control for Uncertain Systems with Norm-bounded Uncertainties**, Soumis, 1993.
 14. GEROMEL, J. C., PERES, P. D. L. and BERNUSSOU, J., **On a Parameter Space Method for Linear Control Design of Uncertain Systems**, SIAM CONT. AND OPT., 29(2), 1991.
 15. GEROMEL, J. C., PERES, P. L. D. and SOUZA, S. R., **H^2 Guaranteed Cost Control for Uncertain Continuous-time Linear Systems**, SYSTEMS AND CONTROL LETTERS, 19, 1992.
 16. GEROMEL, J. C., GARCIA, G. and BERNUSSOU, J., **H^2 Robust Control with Pole Placement**, 12th IFAC World Congress, Australia, 1993.
 17. HOLLOT, C. V. and BARMISH, B. R., **Optimal Quadratic Stabilizability of Uncertain Linear Systems**, Proceedings of the 18th Allerton Conf. on Communication and Computing, 1980.
 18. JABBARI, F., **Robustness Bounds for Linear Systems with Uncertainty: Keeping Eigenvalues in Specified Regions**, Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, Honolulu, Hawaii, 1990.
 19. JUANG, Y. T., HONG, Z. C. and WANG, Y. T., **Robustness of Pole Assignment of Linear Systems with Structured Uncertainty**, IEEE TRANS. ON AUT. CONT., 34(7), 1989.
 20. JUANG, Y. T., **Robust Stability and Robust Pole Assignment of Linear Systems with Structured Uncertainty**, IEEE TRANS. ON AUT. CONT., 36(5), 1991.
 21. KHARITONOV, V. L., **Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Differential Equations**, Diferentsyalnye Uravneya, 14(11), 1978.
 22. MAZCO, A. G., **The Lyapunov Matrix Equation for a Certain Class of Regions Bounded by Algebraic Curves**, SOVIET AUTOMATIC CONTROL, 13, 1980.
 23. MEILAKH, A. M., **Design of Stable Control Systems Subject to Parametric Perturbation**, AUTOMATIKA I TELEMEXHANIKA, 10, 1978.
 24. PERES, P. D. L., GEROMEL, J. C. and ALMUGLA **Quadratic Stabilizability of Linear Uncertain Systems by Linear Output Feedback**, Proc. of European Control Conference, Grenoble, 1991.
 25. PETERSEN, I. R., **Disturbance Attenuation and H^∞ Optimization: A Design Method Based on the Algebraic Riccati Equation**, IEEE TRANS. ON AUTOMATIC CONTROL, 32(5), 1987.
 26. PETERSEN, I. R., **A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems**, SYSTEMS AND CONTROL LETTERS, 8, 1987.
 27. SCHMITENDORF, W. E., **A Design Methodology for Robust Stabilization**, JOURNAL OF GUID. CONTROL DYN., 10, 1987.
 28. SCHMITENDORF, W. E., **Design of Observer Based Robust Stabilizing Controllers**, AUTOMATIKA, 24(5), 1988.
 29. ZHOU, K. and KHARGONEKAR, P. P., **Robust Stabilization of Linear Systems with Norm-bounded Time-varying Uncertainty**, SYSTEMS AND CONTROL LETTERS, 10, 1988.